Trije izzivi iz Splošne Topologije

Dejan Govc

22. januar 2017

Izziv 1. Dan je naslednji podprostor ravnine[1] $\mathbb{R}^2$:

$$A = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\left\{(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \mid y = \sin\frac{1}{x}\right\}\right).$$

Poišči homeomorfizem med prostoroma $X = \mathbb{R}^2 \setminus A$ in $\mathbb{R}^2$.

Rešitev. Definirajmo

$$\begin{aligned} F &= X \cap \big([0,1] \times [-1,1]\big), \\ G &= X \setminus \big((0,1) \times (-1,1)\big) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{(x,y) \in F \mid y \geq \sin\frac{1}{x}\right\}, \\ F_2 &= \left\{(x,y) \in F \mid y \leq \sin\frac{1}{x}\right\}. \end{aligned}$$

Množice F_1, F_2 in G tvorijo končno zaprto pokritje prostora X. Torej lahko definiramo preslikavo $h : X \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$h(x,y) = \begin{cases} (x,y); & (x,y) \in G, \\ (x, 1 + x(y-1)); & (x,y) \in F_1, \\ (x, -1 + x(y+1)); & (x,y) \in F_2. \end{cases}$$

Dobra definiranost (in zveznost) sledi iz dejstva, da se predpisi na presekih ujemajo.[2] Naj bo $Y = h(X)$. Prostor Y lahko opišemo še drugače. Definirajmo zvezni funkciji $f_+ : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ in $f_- : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$\begin{aligned} f_+(x) &= 1 + \min(x,1)\left(\sin\frac{1}{x} - 1\right), \\ f_-(x) &= -1 + \min(x,1)\left(\sin\frac{1}{x} + 1\right), \end{aligned}$$

[1] Oznaka $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}$ pomeni operator zaprtja, tj. $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}(B)$ je najmanjša zaprta množica v $\mathbb{R}^2$, ki vsebuje B.

[2] To in ostale manjkajoče podrobnosti lahko preverite za vajo.

za $x \neq 0$, v krajišču $x = 0$ pa z limitama $f_+(0) = 1$ oziroma $f_-(0) = -1$. Naj bo

$$B = \{(x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \mid f_-(x) \le y \le f_+(x)\}.$$

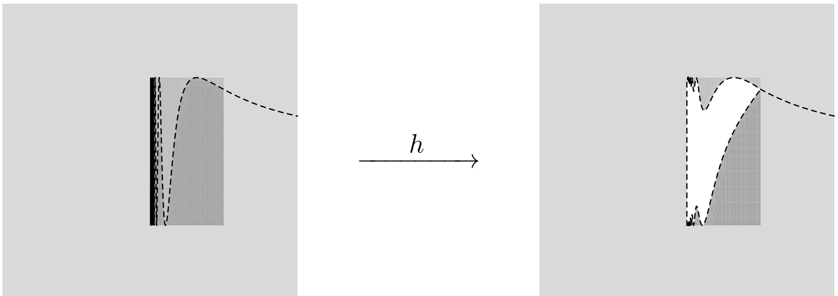
Potem velja

$$Y = \mathbb{R}^2 \setminus B.$$

Preslikava $h : X \to Y$ je bijektivna, njen inverz $h^{-1} : Y \to X$ lahko zapišemo eksplicitno kot

$$h^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y); & (x, y) \in G, \\ (x, \frac{y-1}{x} + 1); & (x, y) \in F_1 \cap Y, \\ (x, \frac{y+1}{x} - 1); & (x, y) \in F_2 \cap Y. \end{cases}$$

Opazimo, da množice $F_1 \cap Y$, $F_2 \cap Y$ in G tvorijo zaprto pokritje prostora Y, predpisi na posameznih kosih so zvezni in se na presekih ujemajo. Inverz je torej zvezen, preslikava $h : X \to Y$ pa je homeomorfizem.



Prostor Y lahko nadalje preslikamo homeomorfno na prostor

$$Z = \mathbb{R}^2 \setminus \big([0, \infty) \times [-1, 1]\big).$$

V ta namen vpeljimo množice

$$\begin{aligned} F_+ &= \{(x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \mid y > f_+(x)\}, \\ F_- &= \{(x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \mid y < f_-(x)\}, \\ F_0 &= \big((-\infty, 0] \times \mathbb{R}\big) \cap Y. \end{aligned}$$

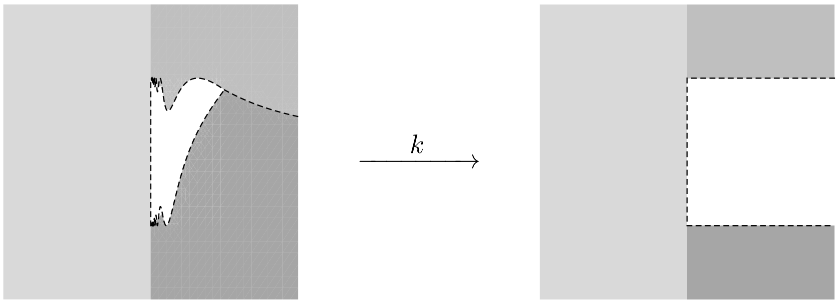
Te množice tvorijo končno zaprto pokritje prostora Y. Definiramo lahko torej preslikavo $k : Y \to Z$ s predpisom

$$k(x, y) = \begin{cases} (x, y + 1 - f_+(x)); & (x, y) \in F_+, \\ (x, y - 1 - f_-(x)); & (x, y) \in F_-, \\ (x, y); & (x, y) \in F_0. \end{cases}$$

Predpisi so na kosih zvezni, na presekih pa se ujemajo. Tudi inverz $k^{-1} : Z \to Y$ te preslikave lahko eksplicitno opišemo:

$$k^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y - 1 + f_+(x)); & (x, y) \in [0, \infty) \times (1, \infty), \\ (x, y + 1 + f_-(x)); & (x, y) \in [0, \infty) \times (-\infty, -1), \\ (x, y); & (x, y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Inverz je očitno zvezen, torej je preslikava $k : Y \to Z$ homeomorfizem.



Homeomorfizma $l : Z \to \mathbb{R}^2$ zdaj ni več težko definirati. Definiramo ga npr. kot kompozitum $l = l_3 \circ l_2 \circ l_1$, kjer je $l_1 : Z \to Z_1$ homeomorfizem na prostor

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < \max(0, |y| - 1)\},$$

definiran s predpisom

$$l_1(x, y) = (x, \max(1, 1 + x)y),$$

prostor Z_1 nato preslikamo na polravnino $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ s preslikavo

$$l_2(x, y) = (x - \max(0, |y| - 1), y),$$

to polravnino pa na $\mathbb{R}^2$ s preslikavo

$$l_3(x, y) = (\log(-x), y).$$

Preslikava $l \circ k \circ h : \mathbb{R}^2 \setminus A \to \mathbb{R}^2$ je iskani homeomorfizem. $\square$

Izziv 2. Naj bo τ_E evklidska topologija na $\mathbb{R}$ in τ_T trivialna topologija na $\{0, 1\}$. Ali obstajata topološka prostora (A, τ_A) in (B, τ_B), tako da velja:

- $|\tau_A| \geq 3$,
- $|\tau_B| \geq 3$ in
- $(A, \tau_A) \times (B, \tau_B) \approx (\mathbb{R}, \tau_E) \times (\{0, 1\}, \tau_T)$?

Rešitev. Pokazali bomo, da taka prostora ne obstajata. Privzemimo, da sta (A, τ_A) in (B, τ_B) topološka prostora, ki zadoščata tretjemu pogoju zgoraj:

$$(A, \tau_A) \times (B, \tau_B) \approx (\mathbb{R}, \tau_E) \times (\{0, 1\}, \tau_T).$$

Naj bo $h : (\mathbb{R}, \tau_E) \times (\{0, 1\}, \tau_T) \to (A, \tau_A) \times (B, \tau_B)$ ustrezni homeomorfizem. Pokazali bomo, da od tod sledi $|\tau_A| = 2$ ali pa $|\tau_B| = 2$, torej da mora biti eden od faktorjev opremljen s trivialno topologijo. To bomo storili v več korakih.

Korak 1. *Vsaj eden od prostorov (A, τ_A) in (B, τ_B) mora imeti neštevno mnogo točk.*

To je očitno: homeomorfizem je bijekcija. Če bi bila torej oba prostora števna, bi bil tudi njun produkt števen. Produkt $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ pa ni števen, saj je realnih števil neštevno mnogo.

V nadaljevanju bomo brez škode za splošnost privzeli, da ima prostor (A, τ_A) neštevno mnogo točk (sicer vlogi A in B zamenjamo).

Korak 2. *Prostori* $(\mathbb{R}, \tau_E)$, $(\{0,1\}, \tau_T)$, (A, τ_A) *in* (B, τ_B) *so povezani s potmi.*

Za $(\mathbb{R}, \tau_E)$ to že vemo, prostor $(\{0,1\}, \tau_T)$ pa je opremljen s trivialno topologijo, zato je poljubna funkcija $\gamma : [0,1] \to (\{0,1\}, \tau_T)$ zvezna. V posebnem to pomeni, da obstaja pot med poljubnima točkama v $\{0,1\}$. Torej je produkt $(\mathbb{R}, \tau_E) \times (\{0,1\}, \tau_T)$ povezan s potmi in zato je tak tudi produkt $(A, \tau_A) \times (B, \tau_B)$. Prostora (A, τ_A) in (B, τ_B) sta zato prav tako s potmi povezana. Če sta namreč π_A in π_B produktni projekciji in je γ pot v $(A, \tau_A) \times (B, \tau_B)$ od točke (a_1, b_1) do točke (a_2, b_2), potem je $\pi_A \circ \gamma$ pot od a_1 do a_2 in $\pi_B \circ \gamma$ pot od b_1 do b_2.

Korak 3. *Prostor* (B, τ_B) *ima največ dve točki.*

Množica $(\mathbb{R} \times \{0,1\}) \setminus \{(0,0), (0,1)\}$ ima dve komponenti za povezanost s potmi, namreč $U = (-\infty, 0) \times \{0,1\}$ in $V = (0, \infty) \times \{0,1\}$. Obe sta neštevni. Ker je h homeomorfizem, sta $h(U)$ in $h(V)$ komponenti za povezanost s potmi množice $(A \times B) \setminus \{h(0,0), h(0,1)\}$. Trdimo, da je to mogoče le, če je $|B| \leq 2$. Denimo namreč, da je $|B| \geq 3$. Pokazali bomo, da bi morala imeti v tem primeru množica $C = (A \times B) \setminus \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ največ eno neštevno komponento za povezanost s potmi, ne glede na izbiro točk $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$.

Naj bo namreč $b_3 \neq b_1, b_2$ in $a_3 \neq a_1, a_2$ in naj bo $(a, b) \in C$ poljubna točka. Če velja $a \neq a_1, a_2$, je $\{a\} \times B$ s potmi povezana podmnožica v C, torej obstaja pot v C od (a, b) do (a, b_3). Množica $A \times \{b_3\}$ je prav tako s potmi povezana podmnožica v C, torej obstaja tudi pot od (a, b_3) do (a_3, b_3). Če velja $b \neq b_1, b_2$, je množica $A \times \{b\}$ s potmi povezana podmnožica v C, torej obstaja pot od (a, b) do (a_3, b). Tudi $\{a_3\} \times B$ je s potmi povezana podmnožica v C, torej obstaja tudi pot od (a_3, b) do (a_3, b_3).

S tem smo pokazali, da od poljubne točke $(a, b) \in C$, razen morda $(a, b) = (a_1, b_2)$ oziroma $(a, b) = (a_2, b_1)$, obstaja pot do točke (a_3, b_3). To pomeni, da vse točke $(a, b) \in C$, razen morda dveh, ležijo v isti komponenti za povezanost s potmi. Torej ima C največ eno neštevno komponento za povezanost s potmi. To pa je v protislovju z dejstvom, da ima $(A \times B) \setminus \{h(0,0), h(0,1)\}$ dve neštevni komponenti za povezanost s potmi. Sklepamo lahko, da je $|B| \leq 2$.

Korak 4. *Prostor* (B, τ_B) *ima trivialno topologijo.*

Topologija τ_B očitno ni diskretna, sicer bi bil produkt $A \times B$ nepovezan. Preostaneta le dve možnosti: prostor B ima trivialno topologijo ali pa je homeomorfen prostoru Sierpińskega, tj. $\mathbb{S} = \{0,1\}$, kjer je množica $\{1\}$ odprta, množica $\{0\}$ pa ne.

Slednjo možnost bomo zdaj izključili. Denimo namreč, da je $B \approx \mathbb{S}$, oziroma brez škode za splošnost kar $B = \mathbb{S}$. Potem je $A \times \{1\}$ odprta s potmi povezana podmnožica v $A \times B$. To pomeni[3], da je $h^{-1}(A \times \{1\}) = J \times \{0,1\}$ za neki odprt interval $J \subseteq \mathbb{R}$. Naj bo $x \in J$. Množica $(\mathbb{R} \times \{0,1\}) \setminus \{(x,0),(x,1)\}$ je nepovezana, torej mora biti tudi $(A \times B) \setminus \{h(x,0), h(x,1)\}$ nepovezana. Toda $h(x,0)$ in $h(x,1)$ ležita v $A \times \{1\}$. Množica $(A \times B) \setminus \{(a_1,1),(a_2,1)\}$ pa je za poljubno izbiro $a_1 \neq a_2$ povezana s potmi. Podmnožica $A \times \{0\}$ je namreč povezana s potmi, med točkama $(a,0)$ in $(a,1)$, kjer je $a \neq a_1, a_2$, pa obstaja pot, namreč $\gamma : [0,1] \to (A \times B) \setminus \{(a_1,1),(a_2,1)\}$, definirana s predpisom

$$\gamma(t) = \begin{cases} (a,0); & t = 0, \\ (a,1); & t > 0. \end{cases}$$

Funkcija γ je zvezna. Če jo namreč zožimo na kodomeni, da dobimo preslikavo $[0,1] \to \{(a,0),(a,1)\} = \{a\} \times \mathbb{S}$, je praslika edine netrivialne odprte množice $\gamma^{-1}\{(a,1)\} = (0,1]$ odprta. □

Izziv 3. Dan je naslednji podprostor ravnine $\mathbb{R}^2$:

$$X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup \big((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big).$$

Ali je prostor X povezan? Ali je povezan s potmi?

Rešitev. V nadaljevanju naj bo $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, oznaka $P\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)$ pa naj pomeni premico skozi točki (x_1,y_1) in (x_2,y_2), tj.

$$P\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \{(x_1,y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Začnimo z naslednjo opazko:

Opazka. *Če za točki $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ velja $p_1 \neq p_2$ in $q_1 \neq q_2$, potem je $P\big((p_1,q_1),(p_2,q_2)\big) \subseteq X$.*

Vsaka točka na premici $P\big((p_1,q_1),(p_2,q_2)\big)$ je namreč oblike $(p_1,q_1) + t(p_2 - p_1, q_2 - q_1)$, torej sta obe koordinati racionalni, če je $t \in \mathbb{Q}$, sicer pa obe iracionalni.

Od tod hitro lahko vidimo, da je prostor X povezan. Naj bo namreč

$$A = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*} P\big((0,0),(p,q)\big).$$

Množica A je očitno povezana (celo s potmi povezana), saj je unija družine premic (torej s potmi povezanih množic), ki se sekajo v izhodišču. Poleg tega je množica A gosta v $\mathbb{R}^2$, saj je že njena podmnožica $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ gosta v $\mathbb{R}^2$ (poljubna metrična krogla v $\mathbb{R}^2$ vsebuje neko točko, ki ima obe koordinati neničelni in racionalni). Torej je A povezana množica z lastnostjo $A \subseteq X \subseteq \overline{A}$, od koder sledi, da je tudi množica X povezana.

Izkaže se, da je prostor X tudi povezan s potmi, za dokaz tega dejstva pa se moramo malce bolj potruditi. Naj bo $(x,y) \in X$ poljubna točka. Pokazali bomo, da obstaja pot[4] od (x,y) do $(0,0)$. Če je $(x,y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$, to

[3] Za vajo lahko podrobno utemeljiš, zakaj to drži.

[4] Spomnimo se, da je relacija „med točkama (x_1,y_1) in (x_2,y_2) obstaja pot v prostoru X“ ekvivalenčna relacija.

že vemo iz prejšnjega odstavka. Če je $(x,y) \in (\mathbb{Q}^* \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Q}^*)$, je $P\big((x,y),(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2})\big) \subseteq X$ in zato obstaja pot do točke $(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2})$, ki leži v $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$. Premica $P\big((\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}),(0,0)\big)$ pa spet leži v X, torej obstaja pot do $(0,0)$.

Preostane še obravnava primera, ko je $(x,y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Izberimo strogo monotoni zaporedji racionalnih števil $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tako da velja $p_1 = q_1 = 0$, $\lim_{n\to\infty} p_n = x$ in $\lim_{n\to\infty} q_n = y$. Premica, ki povezuje sosednji točki v zaporedju $(p_n,q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, leži v X, torej lahko od $(0,0)$ do (x,y) pridemo po ustrezni lomljeni črti, ki te točke povezuje. Natančneje rečeno, iskano pot $\gamma : [0,1] \to X$ definiramo takole:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (p_n,q_n) + (n(n+1)t - n^2 + 1)(p_{n+1} - p_n, q_{n+1} - q_n); & \exists n \in \mathbb{N} : t \in [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}], \\ (x,y); & t = 1. \end{cases}$$

Intervali oblike $[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ tvorijo lokalno končno zaprto pokritje intervala $[0,1)$, predpisi pa se na presekih ujemajo, zato je γ zvezna na intervalu $[0,1)$. Zveznost v točki $t = 1$ pa preverimo posebej. Naj bo $\epsilon > 0$. Zaporedje (p_n,q_n) konvergira k (x,y), torej so vsi členi od nekje naprej, npr. za $n \geq N$, vsebovani v krogli $K\big((x,y),\epsilon\big)$. Ker pa je omenjena krogla konveksna množica, so tudi daljice med temi členi vsebovane v njej, torej se okolica $[\frac{N-1}{N},1]$ točke 1 v celoti preslika v kroglo $K\big((x,y),\epsilon\big)$. S tem je dokaz končan. $\square$