Rešitve nekaterih nalog iz navadnih diferencialnih enačb

Dejan Govc

22. november 2016

V tem dokumentu boste našli rešitve nekaterih nalog[1], ki sem vam jih (delno ali v celoti) pustil za domačo nalogo.

Naloga 1. *Poišči* **vse** *funkcije* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ki rešijo enačbo* $y' = 2\sqrt{|y|}$.

Opomba. Če enačbo razumemo dobesedno, govori o tem, da lahko odvod funkcije y v vsaki točki izračunamo iz funkcijske vrednosti v tej točki. To bi med drugim pomenilo, da odvod obstaja, zato se je smiselno pri reševanju omejili na odvedljive funkcije y. Vsaka taka funkcija y je med drugim zvezna.

Rešitev. Iz enačbe lahko preberemo, da je odvod funkcije y povsod nenegativen. Funkcija y je torej naraščajoča. Od tod sledi, da so množice

$$\begin{aligned} I_- &= \{x \in \mathbb{R} \mid y(x) < 0\}, \\ I_+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid y(x) > 0\} \end{aligned}$$

in

$$I_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid y(x) = 0\}$$

intervali.[2] Po definiciji na intervalu I_0 velja $y = 0$. Poskusimo ugotoviti še, kako se y izraža na intervalih I_+ in I_-. Na intervalu I_+ je funkcija y pozitivna, zato na tem intervalu velja $|y| = y$ in torej

$$\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' = 1,$$

od koder z integracijo dobimo

$$y^{\frac{1}{2}} = x + C$$

oziroma ekvivalentno

$$y = (x + C)^2.$$

Na intervalu I_- je funkcija negativna, zato je $|y| = -y$ in torej

$$\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{1}{2}} y' = 1,$$

[1] Zahvaljujem se dr. Urošu Kuzmanu, ki je z mano delil svoje zapiske, iz katerih sem pobral naloge.

[2] *Interval* je množica $I \subseteq \mathbb{R}$ (lahko tudi prazna), za katero velja: če sta $a, b \in I$ in $a < c < b$, potem je $c \in I$.

od koder z integracijo dobimo

$$-(-y)^{\frac{1}{2}} = x + C$$

oziroma ekvivalentno

$$y = -(x + C)^2.$$

Opazimo lahko, da je interval I_0 zagotovo neprazen. (V nasprotnem primeru bi bila namreč funkcija povsod pozitivna ali pa povsod negativna. Iz eksplicitne izražave bi potem sledilo, da je $x = -C$ ničla funkcije, kar je očitno protislovje.) Za intervala I_- in I_+ pa imamo štiri različne možnosti.

1. možnost: $I_- = I_+ = \emptyset$. V tem primeru velja

$$y = 0.$$

2. možnost: $I_- \neq \emptyset$ in $I_+ = \emptyset$. Iz zveznosti funkcije y sledi, da za neki $C \in \mathbb{R}$ velja

$$y = \begin{cases} -(x + C)^2; & x \leq -C, \\ 0; & x \geq -C. \end{cases}$$

3. možnost: $I_- = \emptyset$ in $I_+ \neq \emptyset$. Iz zveznosti funkcije y sledi, da za neki $C \in \mathbb{R}$ velja

$$y = \begin{cases} 0; & x \leq -C, \\ (x + C)^2; & x \geq -C. \end{cases}$$

4. možnost: $I_- \neq \emptyset \neq I_+$. Iz zveznosti funkcije y sledi, da za neka $C, D \in \mathbb{R}$, $C \leq D$, velja

$$y = \begin{cases} -(x + C)^2; & x \leq -C, \\ 0; & x \in [-C, -D], \\ (x + D)^2; & x \geq -D. \end{cases}$$

S tem smo obravnavali vse možne primere. □

Naloga 2. *Reši enačbo* $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$.

Rešitev. Nastavek $y = e^{\lambda x}$ nas privede do karakteristične enačbe $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, ki ima rešitvi $\lambda_1 = 1 + i$ in $\lambda_2 = 1 - i$. Rešitev homogenega dela enačbe je torej

$$y_H = Ce^x \cos x + De^x \sin x.$$

Splošno rešitev zdaj iščemo z variacijo konstante, torej v obliki

$$y = C(x)e^x \cos x + D(x)e^x \sin x,$$

kjer lahko dodatno privzamemo, da velja sistem enačb

$$\begin{gathered} C'(x)e^x \cos x + D'(x)e^x \sin x = 0, \\ C'(x)(e^x \cos x)' + D'(x)(e^x \sin x)' = e^x \tan x. \end{gathered}$$

Ko izračunamo zapisana odvoda in enačbi delimo z e^x, se sistem poenostavi:

$$\begin{gathered} C'(x) \cos x + D'(x) \sin x = 0, \\ C'(x)(\cos x - \sin x) + D'(x)(\sin x + \cos x) = \tan x. \end{gathered}$$

Z upoštevanjem prve enačbe lahko drugo enačbo še dodatno poenostavimo in dobimo enačbi

$$\begin{aligned} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x &= 0, \\ -C'(x)\sin x + D'(x)\cos x - \tan x &= 0. \end{aligned}$$

Prvo enačbo množimo s $\sin x$, drugo s $\cos x$ in ju seštejemo, pa dobimo enačbo za $D'(x)$:

$$\begin{aligned} C'(x)\cos x \sin x + D'(x)\sin^2 x - C'(x)\sin x \cos x + D'(x)\cos^2 x - \sin x \\ = D'(x) - \sin x = 0. \end{aligned}$$

Podobno dobimo enačbo za $C'(x)$, če prvo enačbo množimo s $\cos x$, drugo pa z $-\sin x$:

$$\begin{aligned} C'(x)\cos^2 x + D'(x)\sin x \cos x + C'(x)\sin^2 x - D'(x)\cos x \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ = C'(x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0. \end{aligned}$$

Integriramo:

$$D(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + D$$

in

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} + \int \cos x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + \sin x + C, \end{aligned}$$

kjer integral funkcije $\frac{1}{\cos x}$ izračunamo s substitucijo $u = \sin x, \mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x$ in razcepom na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - C \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe se torej glasi

$$y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)e^x\cos x + Ce^x\cos x + De^x \sin x, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

□

Naloga 3. *Reši enačbo* $y''' + y' = \tan x$.

Rešitev. **Prvi način.** Karakteristična enačba $\lambda^3 + \lambda = 0$ ima rešitve $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ in $\lambda_3 = 0$, torej je rešitev homogenega dela enačbe

$$y_H = C\cos x + D\sin x + E.$$

Splošno rešitev iščemo z variacijo konstante, torej v obliki

$$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x + E(x),$$

kjer dodatno privzamemo še

$$\begin{aligned} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x + E'(x) &= 0,\\ -C'(x)\sin x + D'(x)\cos x &= 0,\\ -C'(x)\cos x - D'(x)\sin x &= \tan x. \end{aligned}$$

Če tretjo enačbo upoštevamo v prvi, dobimo

$$E'(x) = \tan x,$$

kar lahko integriramo s substitucijo $u = \cos x, \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$:

$$E(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\log u + (E-1) = -\log\cos x + (E-1).$$

Razlog za tak zapis aditivne konstante je, da bomo na ta način na koncu dobili lepši rezultat (tega seveda ne moremo vedeti vnaprej, lahko pa goljufamo za nazaj). Funkciji C in D izračunamo iz druge in tretje enačbe. Najprej drugo enačbo množimo s $\sin x$, tretjo pa s $\cos x$ in ju seštejemo, kar nam da

$$\begin{aligned} &-C'(x)\sin^2 x + D'(x)\cos x\sin x - C'(x)\cos^2 x - D'(x)\sin x\cos x - \sin x\\ &\qquad = -C'(x) - \sin x = 0 \end{aligned}$$

in zato

$$C(x) = \int (-\sin x)\mathrm{d}x = \cos x + C.$$

Nazadnje drugo enačbo množimo s $\cos x$ in tretjo z $-\sin x$ in ju seštejemo, pa dobimo še

$$\begin{aligned} &-C'(x)\sin x\cos x + D'(x)\cos^2 x + C'(x)\cos x\sin x + D'(x)\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\\ &\qquad = D'(x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0. \end{aligned}$$

Kako se integrira slednjo funkcijo, smo videli že tekom reševanja prejšnje naloge. Dobimo

$$\begin{aligned} D(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + \sin x + D. \end{aligned}$$

Splošna rešitev se torej glasi:

$$y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\sin x - \log\cos x + C\cos x + D\sin x + E.$$

Drugi način. Enačbo najprej integriramo. Dobimo (aditivno konstantno spet izberemo tako, da bo rezultat lep):

$$y'' + y = \int \tan x \mathrm{d}x = -\log\cos x + E - 1.$$

Karakteristična enačba je $\lambda^2 + 1 = 0$ in ima ničli $\pm i$, zato je rešitev homogenega dela

$$y_H = C\cos x + D\sin x.$$

Splošno rešitev zdaj iščemo z variacijo konstante, torej v obliki

$$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x,$$

kjer dodatno privzamemo še

$$\begin{aligned} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x &= 0, \\ -C'(x)\sin x + D'(x)\cos x &= -\log\cos x + E - 1. \end{aligned}$$

Prvo enačbo množimo s $\sin x$, drugo s $\cos x$, ju seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} &C'(x)\cos x\sin x + D'(x)\sin^2 x - C'(x)\sin x\cos x + D'(x)\cos^2 x \\ &+ \cos x\log\cos x - (E-1)\cos x = D'(x) + \cos x\log\cos x - (E-1)\cos x = 0. \end{aligned}$$

Integriramo in dobimo

$$\begin{aligned} D(x) &= \int(-\log\cos x + E - 1)\cos x \mathrm{d}x \\ &= \int(-\cos x\log\cos x)\mathrm{d}x + (E-1)\sin x \\ &= -\sin x\log\cos x + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + D + E\sin x, \end{aligned}$$

kjer smo funkcijo $\cos x\log\cos x$ integrirali per partes $u = \log\cos x, \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \int \cos x\log\cos x\mathrm{d}x &= \sin x\log\cos x + \int\frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= \sin x\log\cos x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) - \sin x - D. \end{aligned}$$

Nazadnje še prvo enačbo množimo s $\cos x$ in drugo z $-\sin x$ in ju seštejemo, da dobimo

$$\begin{aligned} &C'(x)\cos^2 x + D'(x)\sin x\cos x + C'(x)\sin^2 x - D'(x)\cos x\sin x \\ &- \sin x\log\cos x + (E-1)\sin x = C'(x) - \sin x\log\cos x + (E-1)\sin x = 0. \end{aligned}$$

Integriramo per partes $u = \log\cos x, \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \sin x \log\cos x \mathrm{d}x - \int (E-1)\sin x \mathrm{d}x \\ &= -\cos x \log\cos x - \int \sin x \mathrm{d}x - \int (E-1)\sin x \mathrm{d}x \\ &= -\cos x \log\cos x + C + E\cos x. \end{aligned}$$

Dobimo torej isto splošno rešitev kot pri prvem načinu:

$$y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\sin x - \log\cos x + C\cos x + D\sin x + E.$$

Tretji način. Najprej vpeljemo novo odvisno spremenljivko $z = y'$. Enačba se poenostavi v

$$z'' + z = \tan x.$$

Karakteristična enačba je $\lambda^2 + 1 = 0$ in ima ničli $\pm i$, zato je rešitev homogenega dela

$$z_H = C\cos x + D\sin x.$$

Splošno rešitev zdaj iščemo z variacijo konstante

$$z = C(x)\cos x + D(x)\sin x,$$

kjer lahko dodatno privzamemo še

$$\begin{aligned} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x &= 0, \\ -C'(x)\sin x + D'(x)\cos x &= \tan x. \end{aligned}$$

Ponovimo že znani razmislek: prvo enačbo množimo s $\sin x$, drugo s $\cos x$, ju seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} &C'(x)\cos x\sin x + D'(x)\sin^2 x - C'(x)\sin x\cos x + D'(x)\cos^2 x - \sin x \\ &\qquad = D'(x) - \sin x = 0, \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$D(x) = -\cos x + D.$$

Za izračun $C(x)$ prvo enačbo množimo s $\cos x$, drugo z $-\sin x$, ju seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} &C'(x)\cos^2 x + D'(x)\sin x\cos x + C'(x)\sin^2 x - D'(x)\cos x\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ &\qquad = C'(x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x}. \end{aligned}$$

To že znamo integrirati:

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + \sin x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je torej

$$z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\cos x + C\cos x + D\sin x.$$

Da iz te rešitve dobimo rešitev originalne enačbe, jo moramo integrirati. Prvi člen lahko integriramo s substitucijo $u = \sin x, \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\cos x\mathrm{d}x &= \int \log(1-u)\mathrm{d}u - \int \log(1+u)\mathrm{d}u \\ &= (1-u) - (1-u)\log(1-u) + (1+u) \\ &\quad - (1+u)\log(1+u) + (2E-2) \\ &= -\log(1-u^2) + u\log\left(\frac{1-u}{1+u}\right) + 2E \\ &= -2\log(\cos x) + \sin x\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + 2E.\end{aligned}$$

Tu smo uporabili

$$\int \log x\mathrm{d}x = -x + x\log x + F,$$

kar lahko vidimo s per partes integracijo $u = \log x, \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Končni rezultat je torej

$$y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\sin x - \log(\cos x) + C\sin x - D\cos x + E,$$

kar je spet isti rezultat kot prej, le vloge konstant so nekoliko drugačne. □

Naloga 4. *Reši enačbo* $x^2y'' - xy' + y = \log x$.

Opomba. V vseh nalogah $\log x$ označuje naravni logaritem.

Rešitev. **Prvi način.** Nastavek $y = x^\lambda$ nas privede do karakteristične enačbe $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0$. Njeni ničli sta $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, torej je rešitev homogenega dela enačbe

$$y_H = Cx + Dx\log x.$$

Desna stran enačbe je polinom stopnje 1 v $\log x$, zato partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$y_P = A\log x + B.$$

Upoštevamo

$$\begin{aligned}y_P' &= \frac{A}{x} \\ y_P'' &= -\frac{A}{x^2}\end{aligned}$$

in dobimo

$$-2A + A\log x + B = \log x,$$

od koder po primerjavi koeficientov sledi

$$A = 1 \qquad \text{in} \qquad B = 2.$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$y = \log x + 2 + Cx + Dx \log x.$$

Drugi način. Vpeljemo novo neodvisno spremenljivko $u = \log x$. Odvisna spremenljivka se po tej substituciji izraža v obliki

$$w(u) = w(\log x) = y(x).$$

Zvezo med višjimi odvodi dobimo tako, da to enačbo dvakrat odvajamo po x. Dobimo

$$w'(u)u' = y'(x),$$

od koder ob upoštevanju

$$u' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

sledi

$$w' = xy'.$$

Po še enem odvajanju od tod sledi

$$w''u' = y' + xy''.$$

To pomeni, da je

$$w'' = xy' + x^2y'',$$

oziroma po prejšnjem

$$w'' - w' = x^2y''.$$

Enačba se torej v novih spremenljivkah glasi

$$w'' - 2w' + w = u.$$

To je enačba s konstantnimi koeficienti. Nastavek $w = e^{\lambda u}$ nam da karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ki ima spet ničli $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Rešitev homogenega dela enačbe je zato

$$w_H = Ce^u + Due^u.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$w_P = Au + B.$$

Upoštevamo

$$w_P' = A \qquad \text{in} \qquad w_P'' = 0,$$

pa dobimo

$$-2A + Au + B = u,$$

od koder po primerjavi koeficientov sledi

$$A = 1 \qquad \text{in} \qquad B = 2.$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$w = u + 2 + Ce^u + Due^u,$$

oziroma v originalnih spremenljivkah

$$y = \log x + 2 + Cx + Dx \log x.$$

$\square$

Naloga 5. *Reši enačbo* $x^2y'' - 3xy' + 5y = 1$.

Rešitev. Nastavek $y = x^\lambda$ nas privede do karakteristične enačbe $\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 5 = 0$. Njeni ničli sta $\lambda_1 = 2 + i$ in $\lambda_2 = 2 - i$, torej je rešitev homogenega dela enačbe

$$y_H = Cx^2 \cos(\log x) + Dx^2 \cos(\log x).$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$y_P = A.$$

Upoštevamo

$$y_P' = 0 \qquad \text{in} \qquad y_P'' = 0$$

in dobimo

$$A = \frac{1}{5}.$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$y = \frac{1}{5} + Cx^2 \cos(\log x) + Dx^2 \sin(\log x).$$

$\square$

Opomba. Enačbe bi se lahko lotili tudi s substitucijo $z = y - \frac{1}{5}$ in bi dobili homogeno Eulerjevo enačbo.

Naloga 6. *S pomočjo Liouvilleove formule reši enačbo* $y'' - \frac{2y'}{x \log x} + \frac{\log x + 2}{x^2 \log^2 x} y = \log x \cos x$. **Namig:** $y_1 = \log x$ *reši homogeni del enačbe.*

Rešitev. Najprej se lotimo homogenega dela enačbe

$$y'' - \frac{2y'}{x \log x} + \frac{\log x + 2}{x^2 \log^2 x} y = 0.$$

Liouvillova formula nam pove, da se determinanta Wronskega za linearno neodvisni rešitvi y_1 in y_2 enačbe

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

izraža v obliki

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \exp\left(-\int a(x) \mathrm{d}x\right).$$

V našem primeru je $a(x) = -\frac{2}{x \log x}$, znana rešitev enačbe pa je $y_1 = \log x$. Integral izračunamo s substitucijo $u = \log x, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2\mathrm{d}x}{x \log x} &= \int \frac{2\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2 \log u + C \\ &= 2 \log \log x + C. \end{aligned}$$

Dovolj bo poiskati eno rešitev y_2, zato lahko izberemo $C = 0$. Po antilogaritmiranju nam tako preostane linearna enačba

$$(\log x) y_2' - \frac{y_2}{x} = \log^2 x. \tag{*}$$

Tu si precej računanja prihranimo, če opazimo, da je ta enačba ekvivalentna (glej prvo opombo spodaj)

$$\left(\frac{y_2}{\log x}\right)' = 1,$$

od koder takoj sledi, da se ena možna rešitev glasi

$$y_2 = x \log x.$$

Splošna rešitev homogenega dela enačbe je torej

$$y_H = Cx \log x + D \log x.$$

Splošno rešitev enačbe iščemo z variacijo konstante, torej v obliki

$$y = C(x)x \log x + D(x) \log x,$$

kjer dodatno privzemamo še, da velja

$$\begin{aligned} C'(x)x \log x + D'(x) \log x &= 0, \\ C'(x)(1 + \log x) + \frac{D'(x)}{x} &= \log x \cos x \end{aligned}$$

Prvo enačbo delimo z $\log x$, drugo pa množimo z x, kar poenostavi sistem:

$$\begin{gathered} C'(x)x + D'(x) = 0, \\ C'(x)x(1 + \log x) + D'(x) = x \log x \cos x. \end{gathered}$$

Prvo enačbo upoštevamo v drugi in dobimo

$$C'(x)x \log x = x \log x \cos x$$

od koder sledi

$$C'(x) = \cos x.$$

Iz prve enačbe zgornjega sistema sledi še

$$D'(x) = -x \cos(x).$$

Od tod z integracijo (enačbo za $D'(x)$ integriramo per partes $u = -x, \mathrm{d}v = \cos x \mathrm{d}x$) dobimo:

$$\begin{aligned} C(x) &= \sin x + C \\ D(x) &= -x \sin x - \cos x + D \end{aligned}$$

in s tem splošno rešitev

$$y = -\log x \cos x + Cx \log x + D \log x.$$

□

Opomba. Pri iskanju druge rešitve y_2 homogenega dela enačbe lahko vedno uporabimo naslednji trik. Izračunajmo odvod kvocienta $\frac{y_2}{y_1}$ in uporabimo Liouvilleovo formulo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \\ &= \frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int a(x)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Če integriramo obe strani in množimo z y_1, torej dobimo drugo rešitev y_2. To smo v bistvu storili zgoraj.

Opomba. Drugo rešitev y_2 lahko iščemo tudi v obliki $y_2 = C(x)y_1$. Če ta nastavek vstavimo v homogeno enačbo, dobimo

$$(C''(x)y_1 + 2C'(x)y_1' + C(x)y_1'') - \frac{2}{x\log x}(C'(x)y_1 + C(x)y_1') + \frac{\log x + 2}{x^2\log^2 x}C(x)y_1 = 0$$

Dejstvo, da y_1 reši homogeni del enačbe, pomeni ravno, da je vsota vseh členov, v katerih nastopa $C(x)$, enaka 0, tj. velja

$$(C''(x)y_1 + 2C'(x)y_1') - \frac{2}{x\log x}(C'(x)y_1) = 0.$$

Upoštevajmo še $y_1 = \log x$ in $y_1 = \frac{1}{x}$, pa preostane le

$$C''(x)\log x = 0,$$

od koder dobimo

$$C(x) = Ax + B.$$

Izbira $A = 1$ in $B = 0$ nam da rešitev

$$y_2 = x\log x.$$

Opomba. Reševanje enačbe (*) z variacijo konstante je precej daljše: homogeni del enačbe

$$(\log x)y_2' - \frac{y_2}{x} = 0$$

je enačba z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{x\log x}.$$

Integrirajmo jo ($u = \log x, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$):

$$\begin{aligned}\log y_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \log u + \log D \\ &= \log\log x + \log D.\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$(y_2)_H = D \log x.$$

Splošno rešitev iščemo z variacijo konstante:

$$y_2 = D(x) \log x.$$

Odvajamo nastavek, ga vstavimo v enačbo, pokrajšamo člene z $D(x)$ in dobimo

$$D'(x) \log^2 x = \log^2 x.$$

Ena izmed rešitev te enačbe je očitno

$$D(x) = x,$$

zato lahko za drugo rešitev homogenega dela spet izberemo

$$y_2 = x \log x.$$