

Vaje iz Matematike in Statistike 2

Dejan Govc, Špela Špenko

20. maj 2014

Naloga 1. Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x+2)}{x^2-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{x^2-1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)^2}{(x^2-9)(x+5)}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{x^2-3x+2}{x-1} \right)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+2)}{x^2-1}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1}$

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6+3}{x^7-5}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2}$

Naloga 2. Nariši grafe naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = x^3 - x^2$

(b) $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$

(c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = e^{x+1} + 2$

(e) $f(x) = \ln(x - 1)$

Naloga 3. Izračunaj poševno asimptoto funkcije $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$. Izračunaj še druge podatke in nariši njen graf.

V zadnjih dveh primerih naslednje naloge bomo potrebovali tole dejstvo:

Izrek. *Recimo, da so f, g, h take funkcije, da velja*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L \in \mathbb{R}$$

in da obstaja tako realno število A , da za vse $x > A$ velja

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Potem je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L.$$

Naloga 4. Izračunaj naslednje limite:¹

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

Opomba. Nekatere točke bomo znali kasneje rešiti še na „lažji način,“ z uporabo t.i. L'Hôpitalovega pravila.

Naloga 5. Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = x^3$

¹pri točki (b) lahko izračunamo še levo in desno limito

(b) $f(x) = x + 1$

(c) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

(d) $f(x) = \cos \pi + 3 \sin x$

(e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x(x-1)}$

(f) $f(x) = (\sqrt{2} - 1)x^{\sqrt{2}+1}$

(g) $f(x) = x^3 + \tan \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \cos^2 x + 5 \cos x + \sin^2 x$

(h) $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

Naloga 6. Napiši enačbo tiste tangente na graf funkcije $f(x) = 2 + x - x^2$, ki je vzporedna premici $y = x$. Graf in tangento tudi nariši.

Naloga 7. Pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij $\sin x$ in $\cos x$ v točki $\frac{\pi}{4}$?

Naloga 8. Poišči enačbo normale na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ skozi točko $(1, 1)$.

Naloga 9. Poišči odvode:

(a) $f(x) = x + 4\sqrt{x} - 2 \sin x + 2014$,

(b) $f(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2 \cos x$,

(c) $f(x) = e^x + ex - 5 \arctan x + \sqrt[3]{x}$,

(d) $f(x) = 2x \tan x + \frac{2}{x^3} + e^{3x+2}$,

(e) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+5}$,

(f) $f(x) = \frac{1}{(x^{12}+3)^{14}}$,

(g) $f(x) = \frac{\sin x}{2x^2+1} + x \ln x$,

(h) $f(x) = \cos(x^2)$,

(i) $f(x) = \cos(\sin(x))$,

(j) $f(x) = e^{2x+3}$,

(k) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$,

(l) $f(x) = \frac{2}{x^3-1} + e^{-\cos x} + 12^x$,

(m) $f(x) = x|x|$.

Naloga 10. Zapiši enačbi tangente in normale na krivuljo $y = \frac{x^2}{x-2}$ pri $x = -2$.

Naloga 11. Določi pod katerim kotom krivulja $y = \frac{\sqrt{3}}{4} \tan(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{3}{4}$ seka osi x in y .

Naloga 12. Poišči globalne ekstreme $f(x) = x^2 - 3x$ na $[0, 4]$.

Naloga 13. Poišči globalne ekstreme $f(x) = x - \ln x$ na $(0, 2]$.

Naloga 14. Poišči globalne ekstreme $f(x) = x^3 e^{-x}$ na vsej realni osi.

Naloga 15. Iz vogalov kvadrata s stranico dolžine 6 izrežemo štiri enake kvadratke. Nato iz preostanka sestavimo škatlo brez pokrova. Kako naj izrežemo, da bo imela škatla največjo prostornino?

Naloga 16. Poišči globalni ekstrem funkcije $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Naloga 17. Trikotnik T ima oglišča $A(0, 0)$, $B(x, y)$ in $C(z, w)$. Točki B in C ležita na isti navpični premici. Poleg tega ležita na enotski krožnici s središčem v izhodišču koordinatnega sistema. Določi koordinate x, y, z, w tako, da bo imel trikotnik maksimalno ploščino.

Naloga 18. S pomočjo L'Hôpitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1-x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \arctan x)$

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \ln x$

Naloga 19. Za naslednje funkcije izračunaj potrebne podatke, vključno z lokalnimi ekstremi ter intervali naraščanja in padanja, in jih nariši:

(a) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

(b) $f(x) = (2x^2 - 17) \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

(c) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$

(d) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $f(x) = x^2 \sqrt{1 - \ln x}$

(f) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x^2}$

Naloga 20. Nariši funkcijo $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.

Naloga 21. Izračunaj integrale:

(a) $\int (x + 4\sqrt{x} - 2 \sin x + 2014) dx,$

(b) $\int (1 + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2 \cos x) dx,$

(c) $\int (e^x + ex - 5 \sin x + \sqrt[3]{x}) dx,$

(d) $\int (\frac{2}{x^3} + 7e^x) dx,$

(e) $\int e^{2x+3} dx,$

(f) $\int \sin \frac{x}{2} dx,$

(g) $\int x \cos(x^2) dx,$

(h) $\int \sin x e^{-\cos x} dx,$

(i) $\int x \sin(2x) dx,$

(j) $\int (x^2 + 2x)e^{-x} dx,$

(k) $\int (x^2 - 3) \ln x dx,$

(l) $\int \frac{x^2}{x-3} dx,$

(m) $\int \frac{x^2+3}{x^2+5} dx,$

$$(n) \int \frac{1}{x^2+2x} dx,$$

$$(o) \int \frac{1}{x^2-4x+5} dx,$$

Naloga 22. Izračunaj nedoločene integrale:

$$(a) \int (4x + 3)^{2014} dx$$

$$(b) \int x^3 \sin x dx$$

$$(c) \int \frac{e^{4x}}{e^x+2} dx$$

$$(d) \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$(e) \int \ln x dx$$

$$(f) \int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$(g) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(h) \int \sqrt{9-x^2} dx$$

$$(i) \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$$

$$(j) \int \arcsin x dx$$

$$(k) \int \sin^3 x dx$$

$$(l) \int \tan x dx$$

$$(m) \int \sin^4 x \cos^3 x dx$$

$$(n) \int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$$

$$(o) \int \sin^2 x dx$$

$$(p) \int \frac{dx}{\sin x}$$

Naloga 23. Izračunaj določene integrale:

$$(a) \int_0^2 (1 + x + e^{\frac{x}{4}}) dx$$

$$(b) \int_0^2 (3x^2 - 4) \cos(x^3 - 4x) dx$$

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{1}{4-x^2} dx$$

Naloga 24. Izračunaj posplošene integrale:

- (a) $\int_0^1 \ln x dx$
 (b) $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^3 x} dx$
 (c) $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$
 (d) $\int_3^\infty \frac{1}{x+7} dx$

Naloga 25. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 4 - x^2$ in $y = x^2 - 2x$.

Naloga 26. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = x$, $y = 2 - x$ in $y = x - \frac{x^2}{2}$.

Naloga 27. Izračunaj dolžino grafa $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ nad intervalom $[1, e]$.

Naloga 28. S pomočjo določenega integrala izračunaj obseg in ploščino kroga s polmerom 1, ki ga opišemo kot območje v ravnini, omejeno z grafoma funkcij $f_+(x) = \sqrt{1-x^2}$ in $f_-(x) = -\sqrt{1-x^2}$. (Domača naloga: krog s polmerom $r > 0$.)

Naloga 29. Izračunaj prostornine in površine vrtenin, ki jih dobimo, če naslednje krivulje zavrtimo okoli osi x :

- (a) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 8$
 (b) $y = \frac{x^3}{3}$, $0 \leq x \leq 3$
 (c) $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x < \infty^2$

Naloga 30. Kroglo s polmerom 1 lahko opišemo kot vrtenino, ki jo dobimo, če zavrtimo krivuljo $y = \sqrt{1-x^2}$ okrog osi x . S pomočjo tega opisa izračunaj površino in volumen krogle. (Domača naloga: krogla s polmerom $r > 0$.)

Naloga 31. Določi definicijski območji funkcij:

- (a) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$
 (b) $f(x, y) = \frac{\ln(1-|x|-|y|)}{xy}$

Naloga 32. Nariši nekaj nivojnic naslednjih ploskev; poskusi skicirati tudi ploskve same:

- (a) $z = x^2 + y^2$

²to ploskev imenujemo „Torricelijeva trobenta“ ali „Gabrielov rog“

(b) $z^2 = x^2 + y^2$

(c) $z = x^2 - y$

Naloga 33. Izračunaj parcialne odvode prvega reda:

(a) $f(x, y) = x^3 + 3xy + \frac{2}{y}$,

(b) $f(x, y) = e^{x^2} + 3 \ln y - \frac{x}{y}$,

(c) $f(x, y) = \sqrt{\ln(x + y^2)}$.

Naloga 34. Izračunaj parcialne odvode prvega in drugega reda funkcije

$$f(x, y) = x^3 e^{x+y} - 17 \tan y.$$

Naloga 35. Poišči in opredeli lokalne ekstreme funkcije:

(a) $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 + 1$,

(b) $f(x, y) = e^{-x}(x - y^2)$,

(c) $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$.

Naloga 36. Poišči splošno in partikularno rešitev diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama:

(a) $x^3 y' = y^2, \quad y(1) = 2$,

(b) $y - y' + x^2 y = 0, \quad y(0) = -2$,

(c) $(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = -1$,

(d) $1 + y^2 = xyy', \quad y(2) = 1$.

Naloga 37. Poišči splošne oziroma partikularne rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb:

(a) $(e^x + 1)y' + e^x y = e^x - 1, \quad y(0) = 0$,

(b) $y' + y = e^x, \quad y(0) = 2$,

(c) $y' - 2y = xe^{-x}$,

(d) $2xy' + y = 2x^3$.

Naloga 38. Poišči splošne oziroma partikularne rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb:

(a) $xy' - (2x - 1)y = x^2, \quad y(1) = e,$

(b) $(1 + e^x)(y + y') = 1,$

(c) $xy' + 2(1 - x^2)y = 1.$

Naloga 39. Pivo, ki ga damo iz hladilnika, se z začetne temperature 4°C v 10 minutah ogreje na 7°C . Temperatura v sobi je 25°C . Kolikšna bo temperatura piva po 20 minutah? (Opomba: iz fizikalnih eksperimentov je znano, da se temperatura spreminja v skladu z enačbo $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, kjer je T_0 temperatura okolice.)

Naloga 40. Zapiši splošne rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb drugega reda:

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0,$

(b) $y'' + y = 0,$

(c) $y'' + 9y = 81x^2$

(d) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

(e) $y'' + 4y = e^{-x} + \sin x$